Физический смысл Ψ-функции

Георгий П. Шпеньков
g.shpenkov@gmail.com

Аннотация. В нерелятивистской квантовой механике (КМ) принято считать, что безразмерная комплексная волновая функция, зависящая от координат и времени, $\hat{\Psi}(x_1, x_2, ..., x_n, t)$, сама по себе *не имеет* физического смысла. *Физический смысл* согласно статистической интерпретации имеет лишь *квадрат её модуля* $|\hat{\Psi}|^2$, вещественное число, интерпретируемое в КМ как плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства конечного объёма в данный момент времени. В настоящей статье показано, что $\hat{\Psi}$-функция, всё-таки, имеет вполне определённый *физический смысл*.

Волновое уравнение

Рассмотрение проблемы физического смысла волновой $\hat{\Psi}$-функции начнём с представления основных сведений о *волновом уравнении* обмена, которому удовлетворяет данная функция.

Волновое уравнение является *базовым* в новой общей теории физики – Волновой Модели. Анализ его *частных решений* $\psi_p(r,\theta,\varphi)$ – *потенциального* компонента *пространственной* составляющей комплексной $\hat{\Psi}$-функции в сферических полярных координатах – привёл к фундаментальному открытию. А именно, к открытию *молекулярно-подобного* строения атомов [1-3].

Трёхмерное волновое уравнение, уравнение обмена, имеет вид:

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

Функция Φ (в общем случае *произвольная*), удовлетворяющая уравнению (1) в некоторой области точек переменных, является решением дифференциального уравнения с частными производными [4]. Допускает частные решения вида:

$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) = \Phi(\boldsymbol{r})e^{\pm i\omega t} \quad (\omega = kc) \qquad (2)$$

В том числе, синусоидальные *сферические стоячие волны*:

$$\Phi(r,\theta,\varphi,t) = \frac{1}{\sqrt{r}}H_{l+1/2}(kr)Y(\theta,\varphi)\cos(\omega t + \alpha) \qquad (l = 0,1,2,...) \qquad (3)$$

где $H_{l+1/2}(kr)$ – функция Ганкеля.

$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(r,\theta,\varphi)$ – частное решение соответствующего уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0 \qquad (4)$$

Потенциально-кинетический градиент $\vec{A}$ *скалярного поля* $\hat{\Phi}$ (потенциала *поля обмена*) [5] по определению равен

$$\vec{A} = grad\hat{\Phi} = \nabla\hat{\Phi} = \left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{\Phi}. \qquad (5)$$

Квалитативный *вектор операций*, которые необходимо выполнить над скаляром $\hat{\Phi}$, носит название оператора Гамильтона или ∇-оператора (набла-оператора). Градиент $\vec{A}$ определяет направление наибольшего пространственного изменения потенциала $\hat{\Phi}$ скалярного поля обмена.

Дивергенция или *плотность потока вектора* $\vec{A}$ поля обмена представляется выражением:

$$div\vec{A} = \lim_{\Delta\Omega\to 0} \frac{1}{\Delta\Omega} \iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{A} \qquad (6)$$

Если вектор $\vec{A}$ выразить через потенциал $\hat{\Phi}$, дивергенция примет вид:

$$div(grad\hat{\Phi}) = \nabla\cdot\nabla\hat{\Phi} = \nabla^2\hat{\Phi} = \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial z^2} \qquad (7)$$

или

$$div(grad\hat{\Phi}) = \nabla^2\hat{\Phi} = \Delta\hat{\Phi} = \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial z^2} \qquad (8)$$

где

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (9)$$

– квалитативный *скаляр операций*, или оператор Лапласа (читается также «лапласиан»).

Таким образом, волновое уравнение обмена (1) $\Delta\hat{\Phi} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial t^2}$ указывает, что *плотность потока вектора* обмена $\vec{A}$ пропорциональна скалярному ускорению потенциала $\hat{\Phi}$.

Координаты *сферического* волнового поля обмена связаны с координатами реперного *прямоугольного* пространства соотношениями:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta \qquad (10)$$

В элементарном объёме $d\Omega$ ∇ - оператор принимает вид

$$\nabla = \left(\vec{e}_x\frac{\partial}{r\partial\theta} + \vec{e}_y\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial r}\right) \qquad (11)$$

а градиент $\vec{A}$ *скалярного поля* $\hat{\Phi}$ –

$$\vec{A} = grad\hat{\Phi} = \nabla\hat{\Phi} = \vec{e}_1\frac{\partial\hat{\Phi}}{r\partial\theta} + \vec{e}_2\frac{\partial\hat{\Phi}}{r\sin\theta\partial\varphi} + \vec{e}_3\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial r}\ , \qquad (12)$$

где

$$A_\theta = \frac{\partial\hat{\Phi}}{r\partial\theta}, \qquad A_\varphi = \frac{\partial\hat{\Phi}}{r\sin\vartheta\partial\varphi}, \quad \text{и} \quad A_r = \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial r} \qquad (13)$$

– *полярная*, *азимутальная* и *радиальная* составляющие градиента поля обмена.

Дивергенция или *плотность потока вектора* $\vec{A}$ в *сферическом* поле обмена имеет следующий вид:

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\vartheta r\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A\varphi rs)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(A_r r^2\sin\theta)}{\partial r}\right) \qquad (14)$$

Если вектор $\vec{A}$ выразить через потенциал $\hat{\Phi}$, дивергенция принимает вид:

$$\Delta\hat{\Phi} = divgrad\hat{\Phi} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial r}\right)\right] \qquad (15)$$

Разделяя переменные, уравнение $\Delta\hat{\Phi} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial t^2}$ распадается на четыре уравнения:

a) *Временное*

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\omega^2 T\ , \qquad (16)$$

и три уравнения пространства,

b) *Радиальное,*

$$(kr)^2 \frac{d^2R}{d(kr)^2} + 2(kr)\frac{dR}{d(kr)} + \left((kr)^2 - l(l+1)\right)R = 0\ , \qquad (17)$$

c) *Полярное,*

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + ctg\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0\ , \qquad (18)$$

d) *Азимутальное,*

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2\Phi\ . \qquad (19)$$

Элементарными линейно независимыми решениями азимутального уравнения являются функции

$$\hat{\Phi}(\varphi) = \Phi_m e^{\pm i(m\varphi+\alpha)}\ , \qquad (20)$$

где Φ_m – постоянный множитель, зависящий от условий нормировки, α – начальная фаза азимутального состояния.

Информация о решениях приведенных выше уравнений, а также другие подробности о волновом уравнении, не упомянутые здесь, содержатся в лекции №5-1 5-го тома “Избранных лекций” автора по Волновой Модели [5].

Обозначим функцию $\hat{\Phi}$ как $\hat{\Psi}$ и положим, что

$$\hat{\Phi} = \hat{\Psi} = R(kr)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)T(\omega t) = \hat{\psi}(kr,\theta,\varphi)T(\omega t) \qquad (21)$$

– некая скалярная *безразмерная* функция $\hat{\Psi}$, комплексная в общем случае.

Уравнение (1) примет вид

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (22)$$

Представляя Ψ- функцию в виде $\Psi = \psi(x,y,z)e^{i\omega t}$, где $\psi(x,y,z)$ её *амплитуда* (комплексная величина в общем случае), мы получаем

$$\Delta\Psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\Psi = -k^2\Psi\ . \qquad (23)$$

Следовательно, волновое уравнение (22) может быть представлено в виде

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0\ , \qquad (24)$$

где $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambdabar}$ – волновое число поля.

Частным решением уравнения (22) в *сферических полярных координатах* являются синусоидальные *сферические стоячие волны*.

И как следует из проведенного нами анализа этого решения, геометрия *расположения узлов* стоячих волн в поле-пространстве тождественна геометрии *расположения* потенциальных узлов (в каждом из которых находится не более чем по 2 *нуклона*) в сферических оболочках атомов, имеющих, таким образом, оболочечно-узловую молекулярно-подобную (безъядерную) структуру.

Физический смысл $\hat{\Psi}$-функции

Волновая $\hat{\Psi}$-функция, зависящая в *сферических* полярных координатах от четырёх переменных r, θ, φ и t, в волновой *оболочечно-узловой* модели атомов имеет *ясный физический смысл*. А именно, является *относительной элементарной гармонической мерой параметра смещения* (амплитуды) колебаний в стоячей волне в радиальном, полярном и азимутальном направлениях в зависимости от времени *t*.

Действительно, произвольная безразмерная $\hat{\Psi}$-функция, удовлетворяющая уравнению (1), во всех случаях её применения имеет вполне определённый *физический смысл* [6].

Представим уравнение $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ (24) в виде произведения Ψ-функции на *биномиальный оператор* как

$$(\Delta + k^2)\Psi = 0 \tag{25}$$

Поскольку Ψ-функция не равна нулю, мы получаем операторное уравнение для простейшего значения оператора Лапласа Δ (считая его переменной операторной величиной): $\Delta + k^2 = 0$. Решая это квадратное уравнение, имеем

$$\Delta = -k^2 \qquad \text{и} \qquad \nabla = -i\mathbf{k}, \tag{26}$$

так как $\Delta = \nabla^2$.

Оператор набла $\nabla = -i\mathbf{k}$ есть *векторный дифференциальный оператор* (оператор градиента распространения волны), компоненты которого являются частными производными по координатам; $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n}$ – волновой вектор, модуль которого – волновое число (*размерность* cm^{-1}), $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны.

Если скалярно умножить *оператор набла* ∇ на $i\hbar$, где $\hbar$ –*квант момента импульса*, элементарное действие ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$, размерность $g\frac{cm}{s}cm$), получим *оператор импульса* в координатном представлении

$$\hat{\mathbf{p}} = i\hbar\nabla, \tag{27}$$

(размерность $g\frac{cm}{s}$). Действие *оператора* импульса $\hat{\mathbf{p}}$ на безразмерную Ψ-функцию,

$$\hat{\mathbf{p}}\Psi = i\hbar\nabla\Psi = \mathbf{p}, \tag{28}$$

определяет *импульс* микрочастицы $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = i\hbar\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) = i\hbar\nabla\Psi, \tag{29}$$

В *волновом* Ψ-поле импульс произвольной частицы (29) принимает, с учётом равенства для оператора набла $\nabla = -i\mathbf{k}$ (26), следующий вид:

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}\Psi = i\hbar\nabla\Psi = \mathbf{k}\hbar\Psi, \tag{30}$$

или, в скалярной форме,

$$p = i\hbar\nabla\Psi = k\hbar\Psi \tag{31}$$

Выражение (30) совпадает с формулой де Бройля $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, устанавливающей зависимость *длины волны* λ, связанной с движущейся частицей вещества, от *импульса p* частицы:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{p} = \frac{h}{2\pi}\mathbf{k} = \hbar\mathbf{k} \tag{32}$$

Таким образом, в *операторе импульса* $\hat{\mathbf{p}} = i\hbar\nabla$ (27) сохранено соответствие с классической формулой де Бройля для *импульса частицы* $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ (32).

Какую роль играет в выражениях для *импульса* частицы (30) и (31) *волновая* Ψ-функция, тогда как в классической формуле де Бройля (32) для *импульса* частицы Ψ-функция отсутствует?

Какой физический смысл имеет Ψ-функция в указанных выражениях?

Любой *физический параметр P* (произвольного физического <u>*волнового*</u> поля) имеет свою *фундаментальную* <u>*волновую*</u> *меру* или *квант-период* P_q. Используя этот квант, значение параметра *P* можно представить количественной *относительной* Ψ-мерой:

$$\Psi = \frac{P}{P_q}. \tag{33}$$

В общем случае параметр *P* есть *комплексная* величина,

$$P = p_k + ip_p. \tag{34}$$

Условимся называть «*действительную*» часть параметра (34) «*кинетической*» составляющей, а «*мнимую*» часть, «*потенциальной*» составляющей *P*-параметра (полезность этой терминологии обоснована в [2, 7]).

В силу этого Ψ-*мера* нулевой физической размерности будет представлять собой *комплексную волновую функцию* с аргументом

$$i(\omega t - \mathbf{kr}) = i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z), \tag{35}$$

который указывает на то, что *количественная* мера *P*-параметра *изменяется* в *пространстве* и *времени*.

Наличие в (35) мнимой единицы *i* не случайно. Это упрощает расчеты и имеет глубокий философский смысл [2, 7, 8]. Аргумент (35) отвечает общим физическим принципам.

Таким образом, <u>*волновая*</u> *структура* <u>*любого физического*</u> *параметра P* представляется следующей скалярной мерой:

$$P = P_q \Psi(i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)). \tag{36}$$

Если *P* есть импульс, то равенство (31) может быть представлено в виде

$$p = k\hbar\Psi(i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)). \tag{37}$$

Относительная элементарная гармоническая мера

$$\Psi = \Psi_m \exp(i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)) \tag{38}$$

любого параметра *P* удовлетворяет дифференциальным уравнениям:

(а) с *пространственными* частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -k_x^2\Psi\,, \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = -k_y^2\Psi\,, \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = -k_z^2\Psi\,, \tag{39}$$

или

$$\Delta\Psi = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\Psi = -k^2\Psi\,, \tag{40}$$

(б) с частными производными по *времени* второго порядка

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\omega^2\Psi\,. \tag{41}$$

Уравнения (40) и (41) образуют волновое уравнение гармонической Ψ-функции

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0\,. \tag{42}$$

Очевидно, сумма элементарных мер составляет меру *общего характера*; поэтому мы полагаем, что уравнение (42) также определяет *волновое* поле *меры произвольного параметра*.

Поскольку в любой точке установившегося волнового движения произведение ее *амплитудной* (пространственной) $\psi(\mathbf{kr})$ и временной $T(\omega t)$ составляющих представляет собой Ψ-функцию, волновое уравнение (42) распадается на амплитудное (*пространственное*) и *временное* уравнения:

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2 T \tag{43}$$

Постоянные параметры k и ω определяются на основании граничных условий.

Поскольку *волновые* уравнения описывают Ψ-меры *произвольных* физических *параметров*, различие их волновой структуры сводится к *различию* кинематических *типов* соответствующих *волновых полей*. Основными волновыми полями являются *плоские*, *цилиндрические, сферические* и *сложные* (сферически-цилиндрические) поля.

Поэтому данные поля в равной степени успешно описывают не только *атомную* структуру, что убедительно показано в работах [9-12], но и структуру *мегаобъектов*, что продемонстрировано в [1, 13].

Заключение

Итак, Ψ-функция, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям с *пространственными* частными производными второго порядка и частными производными по *времени* второго порядка, является о*тносительной элементарной гармонической мерой* любого физического параметра.

В квантовой механике (КМ) каждой физической величине сопоставляется линейный самосопряжённый квантовый оператор. И при построении операторов, как правило, сохраняются в целом соотношения между ними и соответствующими классическими величинами.

В частности, *оператор импульса*, имеющий в координатном представлении вид $\hat{\mathbf{p}} = i\hbar\nabla$ (27), коррелирует с формулой де Бройля $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, устанавливающей зависимость *длины волны* λ, связанной с движущейся частицей вещества, от *импульса* p частицы.

Однако, волновая безразмерная комплексная $\hat{\Psi}$-функция сама по себе в КМ *не имеет* физического смысла. Так полагали в своё время создатели КМ, так считается и до сих пор.

Согласно статистической интерпретации квантовой механики *физический смысл* имеет лишь *квадрат модуля* волновой $\hat{\Psi}$-функции, определяющий *плотность вероятности* обнаружения частицы в данной точке области пространства конечного объёма в данный момент времени.

Анализу, раскрывшему *неадекватность* реальности построенной на базе *постулатов* (вымыслов) *абстрактно-математической* теории КМ (см., например, [6, 9]), посвящён соответствующий видеоролик [14], помещённый на канале автора в YouTube.

Физическая, адекватная реальности, модель *строения атомов* непосредственно следует из частного решения $\psi_p(r,\theta,\varphi)$ трёхмерного волнового уравнения обмена (42) – его *пространственной* составляющей $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ (43) [1-3, 10-12].

Ссылки

[1] L. Kreidik and G. Shpenkov, *Atomic Structure of Matter-Space*, Geo.S, Bydgoszcz, 2001, 584 p.; https://shpenkov.com/atom.html

[2] Georgi P Shpenkov, *The shell-nodal structure of the atoms*, Proceedings of 2nd International Conference on QUANTUM PHYSICS AND QUANTUM TECHNOLOGY, September 25-26, 2017 Berlin, Germany, page 23; Journal of Lasers, Optics & Photonics, 2017, 4, 3 (Suppl); https://shpenkov.com/pdf/talk2017Berlin.pdf

[3] Георгий П. Шпеньков, *Строение атомов*, 01.01.2023;
https://www.youtube.com/watch?v=Cumjdtek4LQ
https://shpenkov.com/pdf/Atoms.pdf

[4] Г. Корн и Т. Корн, *Справочник по математике*; *Для научных работников и инженеров*. «Наука», М., 1970.

[5] George P. Shpenkov, *Material-Ideal Structure of the World*; *Wave Model* (*Selected Lectures*), Vol. 5. Shell-nodal structure of the atoms, Lecture 5-1 "*Wave Equation*", 1-12 pages. Geo.S., Bielsko-Biala, 2021.
https://shpenkov.com/pdf/Vol.5.Shell-NodalAtomicStructure.pdf

[6] G. P. Shpenkov and L. G. Kreidik, *Schrodinger's Errors of Principle*, GALILEAN ELECTRODYNAMICS, Vol. 16, No. 3, 51 - 56, (2005);
http://shpenkov.com/pdf/Blunders.pdf

[7] Георгий П. Шпеньков, *Открытие физического смысла мнимых чисел и единицы* «*i*», 05-10-2022; https://www.youtube.com/watch?v=fTaw3Hfs-eE
https://shpenkov.com/pdf/BinaryAlgebra.pdf

[8] L. Kreidik and G. Shpenkov, *Philosophy and the Language of Dialectics and the Algebra of Dialectical Judgements*, Proceedings of The Twentieth World Congress of Philosophy, Copley Place, Boston, Massachusetts, USA, 10-16 August, 1998;
https://www.bu.edu/wcp/Papers/Logi/LogiShpe.htm
Philosophy of a Material-Ideal Numerical Field, Abstracts, p. 182.

[9] L. Kreidik and G. Shpenkov, *Important Results of Analyzing Foundations of Quantum Mechanics*, Galilean Electrodynamics & QED-East, Special Issues 2, **13**, 23-30, (2002); https://shpenkov.com/pdf/QM-Analysis.pdf

[10] L. Kreidik and G. Shpenkov, *The Shell Structure of Matter Spaces*, International Conference: 50 Years of the Nuclear Shell Model; Present State and Future Trends, Heidelberg, Germany, June 3-5, 1999 (Poster 28),
https://shpenkov.com/pdf/ShellStr.pdf

[11] L. Kreidik and G. Shpenkov, *The Wave Equation Reveals Atomic Structure, Periodicity and Symmetry*, Kemija u Industriji, **51**, 9, 375-384, (2002).

[12] G. Shpenkov and L. Kreidik, *Discrete Configuration of Probability of Occurrence of Events in Wave Spaces*, Apeiron, Vol. 9, No. 4, 91-102 (2002);
http://redshift.vif.com/JournalFiles/V09NO4PDF/V09N4shp.pdf

[13] George P. Shpenkov, *Discovery of the wave nature of gravitation*, International Conference "Physics Beyond Relativity", Prague, Czech Republic, October 18-21, 2019;
https://shpenkov.com/pdf/GravityPrague2019.pdf

[14] Георгий П. Шпеньков, *Уравнение Шрёдингера*, 29.09.2023;
https://www.youtube.com/watch?v=tT7u8LlC2z4
https://shpenkov.com/pdf/ShrEquation.pdf

Георгий П. Шпеньков
09.11.2023, Bielsko-Biała

https://shpenkov.com/pdf/PsiFunction.pdf